**Интерполирование функций**

Пусть на отрезке [*a,b*] имеем множество точек , в которых заданы значения функции . Назовем  узлами интерполирования. Задача состоит в том, чтобы построить такой многочлен степени *n*

 (1)

значения которого в узлах  совпадают со значениями исходной функции , т.е

 (2)

Для отыскания коэффициентов разложения (1) используется условие интерполирования

 (3)

Многочлен (1) для которого выполняются условия интерполяции (3) называется интерполяционным многочленом для функции , построенным по узлам . Данная задача имеет единственное решение, но интерполяционный многочлен может принимать различный вид.

**Интерполяционный многочлен Лагранжа**

Интерполяционным многочленом Лагранжа *n*-ой степени называется многочлен следующего вида

 (4)

При записи формулы необходимо учитывать, что узлы имеют локальную нумерацию, которая зависит от расположения точки *x* , в которой вычисляем значение функции.

Формула Лагранжа применяется как для равноотстоящих узлов, так и для неравномерной сетки.

Для любой точки отрезка интерполирования погрешность интерполяции с использованием формулы Лагранжа выражается следующей формулой

 (5)

**Пример**. Получить таблицу значений аналитически заданной функции *sinx*  на отрезке [0;1] с шагом *h=0.2*. Построить интерполяционный многочлен Лагранжа 2-ой степени для вычисления значений функции в точках *х*=0.3 и *x=0.9*. Отобразить результат на графике и вычислить погрешности интерполяции.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| I | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| *xi* | 0 | 0.2 | 0.4 | 0.6 | 0.8 | 1 |
| *y(xi)* | 0 | 0.1987 | 0.3894 | 0.5646 | 0.7174 | 0.8415 |

Строим полином Лагранжа 2-ой степени.

 ,

где узлы  в локальной нумерации.

Для вычисления значения функции в точке *х*=0.3 выберем следующие узлы сетки: , т.е. локальная нумерация совпадает с исходной.

Подставляем данные из таблицы



Используем построенный полином Лагранжа, чтобы вычислить значение в заданной точке *x*=0.3



Для вычисления значения функции в точке *x=*0.9выберем узлы сетки т.о., чтобы локальная нумерация сохранилась, получим: .



Вычислим значение в заданной точке *x*=0.9 на основе построенного полинома Лагранжа



Оценим погрешность вычислений по формуле



Возьмем и  , производная третьего порядка от функции *sin(x*) будет *соs(х)*





Найдем погрешность вычислений, зная вид исходной функции.

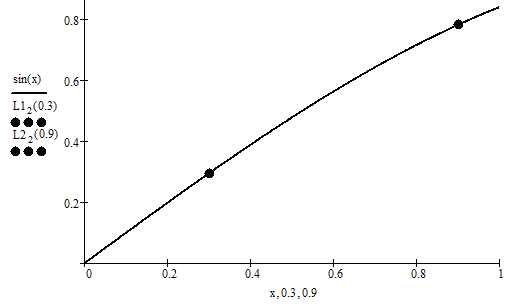
При *x*=0.3 имеем sin(0.3)=0.295520

, 

При *x*=0.9 имеем sin(0.9)=0.78333

, 

Отобразим полученные результаты на графике:



**Интерполяционный многочлен Ньютона**

Интерполяционным многочленом Ньютона *n*-ой степени называется многочлен следующего вида

 (6)

Или



Формулу Ньютона удобно применять для интерполирования одной функции с меняющейся системой узлов, т.к. при добавлении нового узла  нужно вычислить только одно слагаемое и добавить его к предыдущей сумме. Причем узел  может быть добавлен в любое место сетки. Погрешность интерполяции многочленом Ньютона вычисляется по формуле

 (7)

Причем точки  могут совпадать. Погрешность интерполяционной формулы Ньютона можно также представить через разделенные разности

 (8)

 (9)

**Пример.** Получить таблицу значений аналитически заданной функции *sinx* на отрезке [0;1] с шагом *h=0.2*. Построить интерполяционный многочлен Ньютона 2-ой степени и вычислить значение функции в точке *х*=0.3 и *х*=0.9 . Отобразить результат на графике и вычислить погрешности интерполяции.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| I | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| *xi* | 0 | 0.2 | 0.4 | 0.6 | 0.8 | 1 |
| *y(xi)* | 0 | 0.1987 | 0.3894 | 0.5646 | 0.7174 | 0.8415 |

Строим таблицу разделенных разностей.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| i | *xi* | *y(xi)* |  |  |
| 0 | 0 | 0 |  |  |
|  |  |  | 0.9935 |  |
| 1 | 0.2 | 0.1987 |  | -0.1 |
|  |  |  | 0.9535 |  |
| 2 | 0.4 | 0.3894 |  | -0.1938 |
|  |  |  | 0.876 |  |
| 3 | 0.6 | 0.5646 |  | -0.28 |
|  |  |  | 0.764 |  |
| 4 | 0.8 | 0.7174 |  | -0.3137 |
|  |  |  | 0.6205 |  |
| 5 | 1 | 0.8415 |  |  |











По значениям этой таблицы запишем интерполяционный полином Ньютона 2-ой степени, найдем его значение в требуемых точках



При записи формулы необходимо учитывать, что узлы имеют локальную нумерацию, которая зависит от расположения точки *x* , в которой вычисляем значение функции.

Для вычисления значения функции в точке *х*=0.3 выберем следующие узлы сетки: , получим



Для точки *х*=0.9 выберем узлы сетки т.о., чтобы локальная нумерация сохранилась: , получим



Оценим погрешность вычислений, используя формулу остаточного члена интерполяционного полинома Ньютона (8) . Ее значение совпадает с оценкой, полученной для формулы Лагранжа, т.е. .



Произведем оценку вычислений полинома Ньютона в точке *х*=0.3, *х*=0.9 по формуле (8). Для этого добавим разделённую разность 3-го порядка в построенную ранее таблицу.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| i | *xi* | *y(xi)* |  |  |  |
| 0 | 0 | 0 |  |  |  |
|  |  |  | 0.9935 |  |  |
| 1 | 0.2 | 0.1987 |  | -0.1 |  |
|  |  |  | 0.9535 |  | -0.156 |
| 2 | 0.4 | 0.3894 |  | -0.1938 |  |
|  |  |  | 0.876 |  |  |
| 3 | 0.6 | 0.5646 |  |  |  |

Подставим данные из таблицы в формулу (9):



Найдем погрешность вычислений, зная вид исходной функции

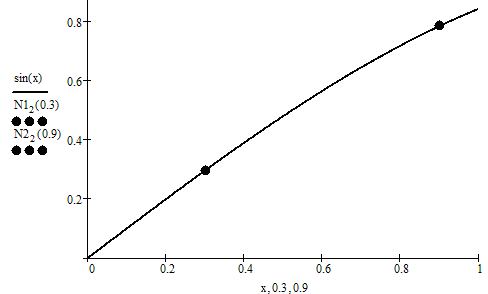
При *x*=0.3 имеем *sin*(0.3)=0.295520

, 

При *x*=0.9 имеем *sin*(0.9)=0.78333

, 

Отобразим полученные результаты на графике:



**Лабораторная работа**

**Задание:**

Получить таблицу значений аналитически заданной функции на указанном отрезке с заданным шагом *h*. Построить интерполяционные многочлены и найти значение функции в 3-х точках *x* в соответствии с вариантом.

а) используя многочлен Лагранжа степени не выше 4, т.е. .

б) используя формулы Ньютона степени .

Отобразить результат на графике и вычислить погрешности интерполяции для каждого случая:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Вариант | Функция  *f* ( *x* ) | Отрезок  [ *x*о; *xп* ] | Шаг *h* | Степень полинома | Точки восполнения |
| 1 |  | 1;2 | 0.2 | , | 1.27 1.55 1.94 |
| 2 |  | 1;2 | 0.2 | , | 1.17 1.34 1.74 |
| 3 |  | 0;π | π/5 | , | 0.71 1.54 3.01 |
| 4 |  | 1;10 | 2.0 | , | 2.24 4.63 7.94 |
| 5 | *x*2 + 4sin(*x*) | 0; π | π/5 | , | 0.71 1.54 3.01 |
| 6 |  | 1;2 | 0.2 | , | 1.27 1.55 1.94 |
| 7 |  | 1;10 | 2.0 | , | 1.24 5.23 8.94 |
| 8 |  | 0; π | π/5 | , | 0.81 1.44 2.81 |
| 9 |  | 0;π | π/5 | , | 0.71 1.54 3.01 |
| 10 |  | 1;10 | 2.0 | , | 2.24 4.63 7.94 |
| 11 |  | 0;1 | 0.2 | , | 0.27 0.62 0.89 |
| 12 |  | 0;5 | 1.0 | , | 1.24 2.63 3.94 |
| 13 |  | 0; 2π | 0.4 π | , | 0.41 3.54 5.74 |
| 14 | 2.2*x*–2*x* | 0;5 | 0.5 | , | 2.24 4.63 4.94 |
| 15 |  | 0;2 | 0.2 | , | 0.27 1.62 1.89 |